1/сеть Σ_p (Δ_m) ортогональна;

2/сеть Σ_p (Δ_m) не определена в направлении Δ_{p-m}.

Пусть V_{p-m} -одна из поверхностей, на которые расслаивается V_p. Тогда в первом случае ортогональная сеть Σ_{p-m} на поверхности V_{p-m} из линий ω^α есть сеть линий кривизны относительно любой одномерной нормали $[x, \vec{e}_i]$. Во втором случае поверхность V_{p-m} состоит из полуомбилических точек.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.-Лит.матем.сборник, 1966, 6, №4, с.475-491.

2. Б а з ы л е в В.Т. Сети на многообразиях.-Тр.геометрического семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с.189-206.

3. П е р е п е л к и н Д.И. Кривизна и нормальные пространства многообразия V_m в R_n.-Матем.сб., 1935, 42, №1, 81-120.

А.С. Сенилов

О РАССЛОЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ V_{k+m} НА $\infty^{m-\sigma}$ ПОВЕРХНОСТЕЙ $_\sigma V_{k+\sigma}$ в P_N

В N - мерном проективном пространстве P_N рассмотрим поверхность $_\sigma V_{k+m}$ с k-мерными плоскими образующими L_k, зависящими от m параметров, имеющую σ семейств торсов ($N > k+m$; $\sigma = 1, 2, \dots, m-1$). Будем рассматривать лишь поверхности, образующая плоскость которых имеет $(k-\tau)$ - мерную характеристическую плоскость $L_{k-\tau}$ (пересечение характеристик плоскости L_k). Выведем достаточный признак расслоения поверхности $_\sigma V_{k+m}$ на $\infty^{m-\sigma}$ тангенциально вырожденных поверхностей $_\sigma V_{k+\sigma}$ [1] .

Отнесем поверхность $_\sigma V_{k+\sigma}$ к проективному реперу $\{A_a\}$, состоящему из $N+1$ аналитических точек A_a ($a, b, c = 0, 1, 2, \dots,$). Уравнения инфинитезимальных перемещений репера имеют вид:

$$dA_a = \omega_a^b A_b, \tag{1}$$

где формы ω_a^b удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства [2] :

$$\mathcal{D}\,\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b \qquad (2)$$

и соотношению

$$\sum_a \omega_a^a = 0 . \qquad (3)$$

Проведем разбиение индексов :

$$0,1,\dots,\tau-1,\underbrace{\tau,\tau+1,\dots,k}_{i,j},k+1,\dots,k+\sigma,\dots,k+m,\underbrace{k+m+1,\dots,N}_{p,q}.$$

Определим образующую плоскость L_k поверхности, характеристическую плоскость $L_{k-\tau}$ и фокальные плоскости $\overset{1}{L}_{k+1}, \overset{2}{L}_{k+1}, \dots, \overset{\sigma}{L}_{k+1}$ следующим образом :

$$L_k = [A_0 A_1 A_2 \dots A_{\tau-1} A_\tau A_{\tau+1} \cdots A_k],\; L_{k-\tau} = [A_\tau A_{\tau+1} \cdots A_k],$$

$$\overset{1}{L}_{k+1} = [A_0 A_1 A_2 \dots A_{\tau-1} A_\tau A_{\tau+1} \dots A_k A_{k+1}],$$

$$\overset{2}{L}_{k+1} = [A_0 A_1 A_2 \dots A_{\tau-1} A_\tau A_{\tau+1} \cdots A_k A_{k+2}],$$

$$\overset{\sigma}{L}_{k+1} = [A_0 A_1 A_2 \dots A_{\tau-1} A_\tau A_{\tau+1} \cdots A_k A_{k+\sigma}].$$

Выберем точку A_0 так, чтобы она не принадлежала ни одной из характеристик $\overset{1}{L}_{k-1}, \overset{2}{L}_{k-1}, \dots, \overset{\sigma}{L}_{k-1}$ плоскости L_k . В этом случае точка A_0 не особая, формы $\omega_0^{k+1}, \omega_0^{k+2}, \dots, \omega_0^{k+\sigma}, \omega_0^{k+\sigma+1}, \dots, \omega_0^{k+m}$ линейно независимы и мы их примем за базисные . Поместив точки $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+m}$ в касательную плоскость поверхности (A_0), получаем $\omega_0^p = 0$.

Дифференциальные уравнения поверхности ${}_\sigma V_{k+m}$ примут вид :

$$
\begin{aligned}
&\omega_0^p = 0,\\
&\omega_1^{k+1} = \ell^{k+1}_{1,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+1}_{1,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\omega_1^{k+2} = t_1\,\omega_0^{k+2} + \ell^{k+2}_{1,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+2}_{1,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\omega_1^{k+\sigma} = t_{\sigma-1}\,\omega_0^{k+\sigma} + \ell^{k+\sigma}_{1,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+\sigma}_{1,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\omega_1^{k+\sigma+1} = \ell^{k+\sigma+1}_{1,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+\sigma+1}_{1,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\omega_1^{k+m} = \ell^{k+m}_{1,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+m}_{1,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\omega_1^{p} = \ell^{p}_{1,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{p}_{1,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\omega_2^{k+1} = \ell^{k+1}_{2,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+1}_{2,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\omega_2^{k+2} = u_1\,\omega_0^{k+2} + \ell^{k+2}_{2,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+2}_{2,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\omega_2^{k+\sigma} = u_{\sigma-1}\,\omega_0^{k+\sigma} + \ell^{k+\sigma}_{2,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+\sigma}_{2,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\omega_2^{k+\sigma+1} = \ell^{k+\sigma+1}_{2,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+\sigma+1}_{2,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\omega_2^{k+m} = \ell^{k+m}_{2,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+m}_{2,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\omega_2^{p} = \ell^{p}_{2,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{p}_{2,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\omega_{\tau-1}^{k+1} = \ell^{k+1}_{\tau-1,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+1}_{\tau-1,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\omega_{\tau-1}^{k+2} = v_1\,\omega_0^{k+2} + \ell^{k+2}_{\tau-1,\sigma+1}\,\omega_0^{k+\sigma+1} + \dots + \ell^{k+2}_{\tau-1,m}\,\omega_0^{k+m},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

$$\omega^{k+\sigma}_{\tau-1} = v_{\sigma-1}\,\omega^{k+\sigma}_0 + \ell^{k+\sigma}_{\tau-1,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{k+\sigma}_{\tau-1,m}\,\omega^{k+m}_0,$$

$$\omega^{k+\sigma+1}_{\tau-1} = \ell^{k+\sigma+1}_{\tau-1,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{k+\sigma+1}_{\tau-1,m}\,\omega^{k+m}_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega^{k+m}_{\tau-1} = \ell^{k+m}_{\tau-1,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{k+m}_{\tau-1,m}\,\omega^{k+m}_0,$$

$$\omega^{p}_{\tau-1} = \ell^{p}_{\tau-1,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{p}_{\tau-1,m}\,\omega^{k+m}_0,$$

$$\omega^{k+1}_{i} = \ell^{k+1}_{i,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{k+1}_{i,m}\,\omega^{k+m}_0,$$

$$\omega^{k+2}_{i} = \ell^{k+2}_{i,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{k+2}_{i,m}\,\omega^{k+m}_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega^{k+\sigma}_{i} = \ell^{k+\sigma}_{i,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{k+\sigma}_{i,m}\,\omega^{k+m}_0,$$

$$\omega^{k+\sigma+1}_{i} = \ell^{k+\sigma+1}_{i,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{k+\sigma+1}_{i,m}\,\omega^{k+m}_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega^{k+m}_{i} = \ell^{k+m}_{i,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{k+m}_{i,m}\,\omega^{k+m}_0,$$

$$\omega^{p}_{i} = \ell^{p}_{i,\sigma+1}\,\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \ell^{p}_{i,m}\,\omega^{k+m}_0.$$

Из уравнений (4) следует, что касательное пространство характеристической плоскости выходит из объединения фокальных плоскостей за счет форм $\omega^{k+\sigma+1}_i, \ldots, \omega^{k+m}_i, \omega^p_i$. Матрица B коэффициентов разложения этих форм по базисным формам имеет вид :

$$\begin{matrix} \ell^{k+\sigma+1}_{i,\sigma+1} & \ldots & \ell^{k+\sigma+1}_{i,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ell^{k+m}_{i,\sigma+1} & \ldots & \ell^{k+m}_{i,m} \\ \ell^{p}_{i,\sigma+1} & \ldots & \ell^{p}_{i,m}. \end{matrix} \qquad (5)$$

Теорема. Если ранг матрицы B равен $m-\sigma$, то поверхность ${}_{\sigma}V_{k+m}$ расслаивается на $\infty^{m-\sigma}$ тангенциально вырожденных поверхностей ${}_{\sigma}V_{k+\sigma}$ с соответствующей системой торсов, что и у поверхности ${}_{\sigma}V_{k+m}$.

Доказательство. Дифференцируя внешним образом уравнения (4), включающие коэффициенты, входящие в матрицу (2), получаем квадратичные уравнения :

$$\Delta\ell^{k+\sigma+1}_{i,\sigma+1}\wedge\omega^{k+\sigma+1}_0 + \ldots + \Delta\ell^{k+\sigma+1}_{i,m}\wedge\omega^{k+m}_0 +$$

$$+\left\{\ell^{k+\sigma+1}_{i,\sigma+1}\left(\ell^{k+\sigma+1}_{k+1,2}-\ell^{k+\sigma+1}_{k+2,1}\right)+\ldots+\ell^{k+\sigma+1}_{i,m}\left(\ell^{k+m}_{k+1,2}-\ell^{k+m}_{k+2,1}\right)\right\}\omega^{k+1}_0\wedge\omega^{k+2}_0 +$$

$$+\left\{\ell^{k+\sigma+1}_{i,\sigma+1}\left(\ell^{k+\sigma+1}_{k+1,3}-\ell^{k+\sigma+1}_{k+3,1}\right)+\ldots+\ell^{k+\sigma+1}_{i,m}\left(\ell^{k+m}_{k+1,3}-\ell^{k+m}_{k+3,1}\right)\right\}\omega^{k+1}_0\wedge\omega^{k+3}_0 +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{\ell^{k+\sigma+1}_{i,\sigma+1}\left(\ell^{k+\sigma+1}_{k+1,\sigma}-\ell^{k+\sigma+1}_{k+\sigma,1}\right)+\ldots+\ell^{k+\sigma+1}_{i,m}\left(\ell^{k+m}_{k+1,\sigma}-\ell^{k+m}_{k+\sigma,1}\right)\right\}\omega^{k+1}_0\wedge\omega^{k+\sigma}_0 +$$

$$+\left\{\ell^{k+\sigma+1}_{i,\sigma+1}\left(\ell^{k+\sigma+1}_{k+\sigma-1,\sigma}-\ell^{k+\sigma+1}_{k+\sigma,\sigma-1}\right)+\ldots+\ell^{k+\sigma+1}_{i,m}\left(\ell^{k+m}_{k+\sigma-1,\sigma}-\ell^{k+m}_{k+\sigma,\sigma-1}\right)\right\}\omega^{k+\sigma-1}_0\wedge\omega^{k+\sigma}_0,$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta l^{k+m}_{i,\sigma+1}\wedge\omega_0^{k+\sigma+1}+\ldots+\Delta l^{k+m}_{i,m}\wedge\omega_0^{k+m}+\\
&+\{l^{k+m}_{i,\sigma+1}(l^{k+\sigma+1}_{k+1,2}-l^{k+\sigma+1}_{k+2,1})+\ldots+l^{k+m}_{i,m}(l^{k+m}_{k+1,2}-l^{k+m}_{k+2,1})\}\,\omega_0^{k+1}\wedge\omega_0^{k+2}+\\
&+\{l^{k+m}_{i,\sigma+1}(l^{k+\sigma+1}_{k+1,3}-l^{k+\sigma+1}_{k+3,1})+\ldots+l^{k+m}_{i,m}(l^{k+m}_{k+1,3}-l^{k+m}_{k+3,1})\}\,\omega_0^{k+1}\wedge\omega_0^{k+3} \qquad (6)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\{l^{k+m}_{i,\sigma+1}(l^{k+\sigma+1}_{k+1,\sigma}-l^{k+\sigma+1}_{k+\sigma,1})+\ldots+l^{k+m}_{i,m}(l^{k+m}_{k+1,\sigma}-l^{k+m}_{k+\sigma,1})\}\,\omega_0^{k+1}\wedge\omega_0^{k+\sigma}+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\{l^{k+m}_{i,\sigma+1}(l^{k+\sigma+1}_{k+\sigma-1,\sigma}-l^{k+\sigma+1}_{k+\sigma,\sigma-1})+\ldots+l^{k+m}_{i,m}(l^{k+m}_{k+\sigma-1,\sigma}-l^{k+m}_{k+\sigma,\sigma-1})\}\,\omega_0^{k+\sigma-1}\wedge\omega_0^{k+\sigma},\\
&\Delta l^{p}_{i,\sigma+1}\wedge\omega_0^{k+\sigma+1}+\ldots+\Delta l^{p}_{i,m}\wedge\omega_0^{k+m}+\\
&+\{l^{p}_{i,\sigma+1}(l^{k+\sigma+1}_{k+1,2}-l^{k+\sigma+1}_{k+2,1})+\ldots+l^{p}_{i,m}(l^{k+m}_{k+1,2}-l^{k+m}_{k+2,1})\}\,\omega_0^{k+1}\wedge\omega_0^{k+2}+\\
&+\{l^{p}_{i,\sigma+1}(l^{k+\sigma+1}_{k+1,3}-l^{k+\sigma+1}_{k+3,1})+\ldots+l^{p}_{i,m}(l^{k+m}_{k+1,3}-l^{k+m}_{k+3,1})\}\,\omega_0^{k+1}\wedge\omega_0^{k+3}+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\{l^{p}_{i,\sigma+1}(l^{k+\sigma+1}_{k+1,\sigma}-l^{k+\sigma+1}_{k+\sigma,1})+\ldots+l^{p}_{i,m}(l^{k+m}_{k+1,\sigma}-l^{k+m}_{k+\sigma,1})\}\,\omega_0^{k+1}\wedge\omega_0^{k+\sigma}+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\{l^{p}_{i,\sigma+1}(l^{k+\sigma+1}_{k+\sigma-1,\sigma}-l^{k+\sigma+1}_{k+\sigma,\sigma-1})+\ldots+l^{p}_{i,m}(l^{k+m}_{k+\sigma-1,\sigma}-l^{k+m}_{k+\sigma,\sigma-1})\}\,\omega_0^{k+\sigma-1}\wedge\omega_0^{k+\sigma}.
\end{aligned}
$$

Из квадратичных уравнений (6) получаем систему линейных однородных уравнений относительно разностей $l^{k+\sigma+1}_{k+1,2}-l^{k+\sigma+1}_{k+2,1},\ldots,l^{k+m}_{k+1,2}-l^{k+m}_{k+2,1}$. Эта система содержит $m-\sigma$ неизвестных и имеет матрицу коэффициентов, совпадающую с матрицей (5). Систему линейных однородных уравнений с той же матрицей коэффициентов получим относительно разностей $l^{k+\sigma+1}_{k+1,3}-l^{k+\sigma+1}_{k+3,1},\ldots,$ $l^{k+m}_{k+1,3}-l^{k+m}_{k+3,1}$ и т.д. Общее число таких систем равно C^2_σ. Если матрица (5) имеет максимально возможный ранг, равный $m-\sigma$, то все системы имеют только нулевые решения, т.е.

$$
l^{k+\sigma+1}_{k+1,2}-l^{k+\sigma+1}_{k+2,1}=0,\ldots,l^{k+m}_{k+1,2}-l^{k+m}_{k+2,1}=0,\ l^{k+m}_{k+\sigma-1,\sigma}-l^{k+m}_{k+\sigma,\sigma-1}=0. \qquad (7)
$$

При выполнении соотношений (7) получаем:

$$
\mathcal{D}\omega_0^{k+\sigma+1}\equiv 0,\ldots,\mathcal{D}\omega_0^{k+m}\equiv 0 \pmod{\omega_0^{k+\sigma+1},\ldots,\omega_0^{k+m}},
$$

что и доказывает теорему .

Список литературы

1. Гейдельман Р.М., Кругляков Л.З. О плоскостных поверхностях.-ДАН СССР, математика, 1974, т.219,№ 1.
2. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., ГИТТЛ, 1948 .